№10 дәріс сабағы

Кездейсоқ шамалардың бастапқы және орталық теориялық моменттері. Үлкен сандар заңы. Чебышев теңсіздігі. Чебышев теоремасы. Бернулли теоремасы.

Сынақтардың саны үлкен болғанда олардың ортақ нәтижелерінің орнықтылығын үлкен сандар заңы ретінде ұғуға болады.

Чебышев теоремасы. $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ қос – қостан тәуелсіз кездейсоқ шамалары және $D(X_i) \le C, i = 1,2,\ldots,$мұндағы C - кез-келген тұрақты. Онда кез келген $\varepsilon > 0$ үшін

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

теңдігі орынды.

Марков теоремасы. $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ кездейсоқ шамалары $n \to \infty$ үшін $\frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \to 0$ теңдігін қанағаттандыратын болсын. Онда $\varepsilon > 0$ үшін

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

теңдігі орынды.

Бернулли теоремасы. n тәуелсіз сынақ кезінде m сәтті жағдай және әрқайсысында ықтималдық p - ға тең болсын. Онда $\varepsilon > 0$ үшін

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

теңдігі орынды.

Теоремалардың дәлелдеулері кез-келген $\varepsilon > 0$ үшін ақырлы математикалық күтімі $M(X)$ мен ақырлы дисперсиясы $D(X)$ бар X кездейсоқ шамасы қанағаттандыратын $P\{|X - M(X)| \ge \varepsilon\} \le D(X)/\varepsilon^2$ Чебышев теңсіздігіне сүйенеді.

Мысал 34. Чебышев теңсіздігін қолданып, X кездейсоқ шамасының өзінің $M(X)$ математикалық күтімінен $N\sigma$-дан кем ауытқуының ықтималдығын бағала, мұндағы $\sigma = \sqrt{D(X)}$, $D(X)-$дисперсия, N – нұсқа нөмірі.

Шешуі. N = 31 және $\varepsilon = N\sigma$ болсын.$|X - M(X) \ge \varepsilon|$, $|X - M(X)| < \varepsilon -$ оқиғалары қарама-қарсы оқиғалар, ендеше

$$P\{|X - M(X)| \ge N\sigma\} + P\{|X - M(X)| < N\sigma\} = 1,$$

онда Чебышев теңсіздігінен

$$1 - P\{|X - M(X)| < N\sigma\} = P\{|X - M(X)| \ge N\sigma\} \le \frac{D(X)}{N^2\sigma^2}$$

екені шығады. Бұдан:

$$P\{|X - M(X)| < N\sigma\} \ge 1 - \frac{\sigma^2}{N^2\sigma^2} \approx 0{,}9979,$$

$$0{,}9979 \le P\{|X - M(X)| < 31\sigma\} \le 1.$$